Una formula per la misurazione oggettiva della difficoltà di comprensione di un testo di matematica da parte degli studenti. Uso valutativo e uso didattico

Bruno D'Amore
Universidad Distrital "Francisco José de Caldas"
Martha Isabel Fandiño Pinilla
NRD dell'Università di Bologna

Ricercatori partecipanti:
in Italia:
scuola primaria: Anna Angeli, Lorella Campolucci, Luigina Cottino, Erminia Dal Corso (con funzione di coordinatore), Margherita Francini, Claudia Gualandi, Giuliana Liverani, Antonella Marconi, Annarita Monaco (con funzione di coordinatore), Paola Nannicini, Laura Prosdocimi;
scuola secondaria: Gianni Callegarin, Irene Foresti, Maura Iori (con funzione di coordinatore);
tutti membri del RSDDM (Gruppo di Ricerca e Sperimentazione in Didattica e Divulgazione della Matematica) di Bologna;
in Colombia:
scuola secondaria: Angélica Molano Zárate e Clara Cecilia Rivera Escobar.

Abstract. *This article provides an objective formula for the empirical evaluation of the understanding of a mathematical text by students of any level of education. Of this formula we suggest an evaluative and educational use.*

Keywords: readability formula, formula of understanding, comprehension difficulties of a mathematical text, read mathematics, writing mathematics (TEP)

Sunto. *In questo articolo si fornisce una formula oggettiva per la valutazione empirica della comprensione di un testo di matematica da parte degli studenti di qualsiasi livello scolastico. Di tale formula si suggerisce un uso valutativo e didattico.*

Parole chiave: formula di leggibilità, formula di comprensione, difficoltà di comprensione di un testo matematico, leggere di matematica, scrivere di matematica (TEP)

Resumen. *Este artículo proporciona una fórmula objetiva para la evaluación empírica de la comprensión de un texto matemático por parte de los estudiantes de todos los niveles. De esta fórmula se sugiere un uso evaluativo y un uso educativo.*

Palabras clave: fórmula de legibilidad, fórmula de entendimiento, dificultad de comprensión de un texto matemático, leer la matemática, escribir de matemática (TEP)

1. Antecedenti teorici e quadro di riferimento

Negli anni ’80 furono molto studiati i cosiddetti “test di leggibilità”, nati nei decenni precedenti, soprattutto per quanto riguarda la matematica; questa nuova generazione di studi durò una quindicina di anni e poi si esaurì; ma il problema della comprensione dei testi di matematica da parte degli studenti perdura … Più di un collega insegnante in non importa quale grado di scuola ci assicura che leggere e capire un testo di matematica è tutt’oggi impresa ardua per lo studente, in generale.

Fra tutti i test, ebbero fortuna i cosiddetti “test di chiusura”: si sceglie un testo di matematica e si cancella una parola ogni n (la n-esima, la $2n$-esima, e così via); lo studente è invitato a leggere il testo nel quale appaiono cancellazioni e a mettere nel posto lasciato vuoto dalla cancellazione la parola che gli sembra più opportuna per ridare un senso al testo che sta leggendo.

Varie prove empiriche soprattutto in inglese e francese, ma anche greco e italiano, fecero compiere delle scelte a proposito di costanti e variabili che apparivano nelle cosiddette formule di leggibilità.

Fra le molte ricerche in questa direzione, segnaliamo di seguito solo quelle che ci hanno offerto più strumenti per la formulazione della nostra, che mostreremo successivamente.

In varie discipline, non necessariamente in matematica, emergono per importanza, fra le altre, le ricerche di Vogel e Washburne (1928) che costituiscono un classico in questo campo; la loro analisi si basa su vari fattori, fra i quali sono predominanti la lunghezza del brano in lettura e la tipologia/difficoltà ortografica delle parole cancellate; la formula da noi cercata, invece, vorrebbe misurare la qualità della difficoltà, dunque indipendentemente dalla lunghezza del brano. La loro si riferisce all’oggetto “testo di matematica” (più o meno “facile”, dal punto di vista oggettivo), la nostra alla persona “studente che legge un testo di matematica” (studente più o meno in difficoltà nel ricostruire il testo iniziale).

Abbiamo poi gli studi di Taylor (1953), Rankin (1970) e Henry (1973); pur nelle loro differenze specifiche, essi hanno parecchio in comune tra loro: in tutti si sostiene l’opportunità e la validità del test di chiusura come strumento di analisi e si danno risultati interessanti su ricerche empiriche effettuate in aula. Le analisi presentate sono così convincenti che abbiamo deciso di optare anche noi per una formula che si basasse sul test di chiusura.

Passando alla sola matematica, segnaliamo quella che riteniamo essere la prima veramente specifica: Kane, Byrne e Hater (1974); questa ricerca, effettuata su testi di matematica in lingua inglese, non solo propone risultati sulla capacità o meno di comprensione di un testo di matematica da parte di studenti giovani, ma vi si analizzano modalità attraverso le quali aiutare gli allievi in difficoltà a comprendere i testi; questa ricerca, vedremo, in qualche modo anticipa la nostra che va nello stesso senso.

Fra le numerose altre ricerche, ci hanno particolarmente influenzato le seguenti: Gagatsis (1980, 1982, 1984, 1985, 1995) e Gagatsis e Chaney (1983).

Prendiamo in considerazione l'ultima in termini cronologici (Gagatsis, 1995) perché in essa si analizzano le varie formule e i risultati compresi nelle precedenti ricerche; le formule che vengono confrontate fra loro sono tutte del tipo:

$$\text{Leggibilità} = ax+by+cz+k$$

dove a, b, c, k sono costanti numeriche assegnate dall'esperienza, determinate dalla lingua e da altri fattori, mentre x, y, z sono variabili che rappresentano elementi oggettivamente misurabili dei test.

Le formule elaborate da Gagatsis sono basate su precedenti classiche; per esempio, la formula di Rudolph Flesh (1951) per la lingua inglese è la più diffusa:

$$\text{Facilità di lettura} = 206{,}835 - 0{,}846x - 1{,}015y$$

dove x è il numero medio di sillabe contenute in 100 parole e y è il numero medio di parole per frase.

Un famoso esempio assai citato di adattamento al francese è quello di Kandel e Moles (1958):

$$\text{Facilità di lettura} = 206{,}85 - 0{,}74x - 1{,}015y;$$

mentre un adattamento al greco appare in Gagatsis (1982):

$$\text{Facilità di lettura} = 206{,}85 - 0{,}59x - 1{,}015y.$$

In Gagatsis (1995) si è applicata una formula dello stesso tipo a un testo in lingua italiana per studenti di III media (il testo in questione era tratto da D'Amore, 1981).

Applicando a questo brano in italiano le formule di leggibilità euristicamente stabilite rispettivamente per la lingua francese e la greca, si ottengono due valori assai diversi tra loro, rispettivamente 19,05 e 52,55 con il che si dimostra che la formula è specifica per una lingua e per le sue variabili lessicografiche implicite (Gagatsis, 1995). La nostra formula, invece, basata sulla persona che legge più che sul testo, tende a proporsi come non strettamente vincolata alla lingua ma alla tipologia delle parole cancellate che vanno rimesse al loro posto.

Sulla base di questa esperienza, Gagatsis (1995) mostra come può costruirsi empiricamente una formula di leggibilità, evidenziando come la sua funzionalità necessiti di un numero assai più alto di costanti e variabili ma restando pur sempre nel campo di determinazione della maggiore o minore difficoltà di lettura del testo, grazie a formule di chiusura (cioè di reimmissione di parole dopo le cancellazioni ogni *n*) che abbiamo illustrato prima. Ma la necessità di elementi in più rende quasi inapplicabile la formula per usi che vorrebbero essere di carattere metodologico didattico, concrete e utili per una situazione d'aula reale (come abbiamo verificato durante gli studi realizzati in una tesi di maestría in Educación Matemática presso l'Università di Medellin, tesi della quale siamo stati direttori e sulla quale torneremo).

2. Difficoltà di gestione del linguaggio matematico da parte degli studenti

Le ricerche in questo ambito mettono ancora più in luce una ben nota e diffusa difficoltà degli studenti nelle ore di matematica, quella legata in generale alle interazioni fra lingua matematica e lingua comune, argomento studiato da vari autori, per esempio Laborde (1982, 1990, 1995).

Questa Autrice ha più volte evidenziato il seguente fattore: che il discorso matematico ha un codice semiologico proprio che comporta un'economia di espressione che si realizza grazie a due componenti essenziali, specifiche per il linguaggio matematico: una funzione di designazione e una di localizzazione (Laborde, 1995). Ciò comporta un uso semantico univoco e talvolta nuovo dei termini e delle modalità espressive della lingua naturale che sono in qualche modo resi specifici grazie a una loro reinterpretazione nel discorso matematico.

Altra caratteristica del discorso matematico è la sua universalità (Laborde, 1995). C'è poi il problema che, all'interno del discorso matematico, si mescolano il linguaggio naturale e (un più o meno diffuso uso della) scrittura simbolica, fatto che nel discorso naturale non avviene; lo studente e l'insegnante adottano tre tipi di strategie per far fronte alle impressionanti differenze fra i due linguaggi:

1. la ripetizione nel corso del testo dell'espressione che descrive l'oggetto matematico (cosa che nel linguaggio naturale è, di solito, il più possibile da evitare: le ripetizioni sono, di solito, considerate negative in un testo letterario e necessarie in un testo matematico);
2. il riferimento a caratteristiche temporali che hanno un senso nel linguaggio naturale, ma non in quello matematico;
3. uso di proprietà di distinzione, tipiche del linguaggio naturale ma non di quello matematico, per esempio relative alla dislocazione spaziale o alla grandezza o al tempo (Laborde, 1995).

Queste considerazioni hanno spinto Laborde ad analisi sulle difficoltà di lettura dei testi matematici, dato che in essi il linguaggio naturale e quello matematico si complementano e si intersecano (Laborde, 1995).

Una dettagliata analisi di tutto ciò si trova in D'Amore (1999a, tutto il cap. 8); ma i lavori più specifici nei quali si evidenziano problemi di interpretazione linguistica sia nella lettura in generale sia, e soprattutto, nella lettura e interpretazione dei testi scritti dei problemi verbali, si trovano in D’Amore (1993a, 1993b, 2014); in essi si mostra come si sviluppi un vero e proprio conflitto fra i due linguaggi, come fossero fra loro antagonisti; ciò anche quando l’insegnante ha predisposto situazioni adidattiche dunque situazioni che dovrebbero rendere l’allievo protagonista della costruzione del proprio sapere, linguaggio compreso (grazie alla fase di devoluzione) (D’Amore & Sandri, 1994). (Per la terminologia tecnica usata si veda D’Amore, 1999a).

Altri studi di grande interesse sulle interferenze fra linguaggio matematico e lingua comune si trovano in lavori di Maier (1989b, 1996) che mostrano diverse occasioni di mancata comunicazione da parte dello studente, mancata comunicazione che potrebbe essere banalmente ascritta a ignoranza matematica ma che invece si spiega molto meglio facendo riferimento appunto a queste interferenze. Tutti questi studi concordano, pur nelle specifiche differenze, su alcuni punti:

1. in tutti si evidenzia la difficoltà degli studenti nell’impadronirsi delle caratteristiche del linguaggio matematico in aula (D’Amore, 1999a);
2. in forma più o meno esplicita e consapevole, si studia la sensazione che avverte lo studente (di non importa quale età) di dover far uso, per motivi legati al contratto didattico, di una supposta tipicità di quel che egli avverte come linguaggio matematico usato in aula dall’insegnante e dai compagni che hanno successo nella valutazione scolastica, fino a creare un linguaggio specifico il più delle volte inopportuno, che è stato ironicamente chiamato “matematichese” (D’Amore, 1987).

Una reiterata analisi di queste difficoltà, vista da diverse angolazioni e raccogliendo le istanze segnalate dei precedenti Autori si trova in D’Amore (1993b, 1996, 1997, 2000), in D’Amore e Sandri (1994, 1996) e in D’Amore e Martini (1998).

Visto in generale l’ampio discorso sulle difficoltà di interpretazione e di gestione di un discorso che non sia rigidamente formale e matematico, ma di interrelazione fra lingua naturale e matematica scolastica, resta il problema di stabilire una formula il più possibile oggettiva per una valutazione quantitativo-numerica di tale difficoltà di interpretazione o, meglio, di interpretazione di tale testo nel corso della lettura.

3. Verso una formula oggettiva di valutazione della difficoltà di interpretazione di un testo di matematica da parte di studenti

Recentemente, abbiamo riproposto lo studio e l’applicazione delle formule classiche di leggibilità/facilità di un testo di matematica in Colombia, come argomento di una tesi sulla comprensione dei testi di matematica nei corsi 6° e 7° (I e II media) a due studentesse del master in Didattica della Matematica dell'Università di Medellin.[1] E ci siamo tutti accorti, direttori di tesi e candidate al master, che ciascuna delle formule di leggibilità adottate era da considerarsi un po' artificiosa, complicata da gestire, difficile da usare e da interpretare in concreto.

Soprattutto, la sua interpretazione era relativa al testo e non alle difficoltà dei singoli studenti con la conseguente incertezza successiva di come articolare un intervento didattico mirato sugli studenti.

Ci siamo trovati nella necessità di elaborare una formula valida per tutti i livelli scolastici che fosse più orientata verso i singoli studenti che non verso l'oggetto di studio in sé, dando anche chiarimenti definitori, come i tre seguenti:

1. che cosa vuol dire, in questo contesto, "testo di matematica";
2. che cosa vuol dire che un certo testo è adatto a un determinato gruppo-classe di studenti;
3. che cosa vuol dire "capire" un brano di un testo di matematica;
4. quali variabili determinano le differenze fra i diversi tipi di testi di matematica.

1. Nella nostra accezione, testo di matematica è un testo a carattere matematico o di contenuto matematico, non necessariamente libro di testo scolastico; può essere un parascolastico o un libro di lettura a carattere e con contenuto considerabile come matematico.
2. Un testo è considerato adatto a una classe di grado n (es. di grado 5, cioè in Italia V primaria) se è considerato unanimemente tale dall'autore che lo scrive, dalla casa editrice che lo pubblica e dall'insegnante che lo sceglie o lo consiglia.
3. Seguendo la tradizione di comprensione o leggibilità delle formule citate in 1., consideriamo che lo studente capisca un brano di un testo di matematica adatto alla classe cui appartiene se è in grado di "chiudere" il brano che presenta cancellazioni, cioè scegliere con un certo qual successo le parole che sono state cancellate nel brano, ponendo esattamente quelle cancellate o loro sinonimi secondo il giudizio di un esperto che controlla il test o dell'insegnante di classe. A questo punto si pone immediatamente un problema: che cosa significa "un certo qual successo"? La formula che abbiamo elaborato, proposto, sperimentato, più volte modificato sulla base di prove euristiche e che riporteremo fra breve, misura, a nostro avviso, una scala numerica di maggiore o minore comprensione del brano in

[1] Si tratta delle professoresse Angélica Molano Zárate e Clara Cecilia Rivera Escobar che, nel corso del 2013, hanno sostenuto in comune la tesi dal titolo *El lenguaje narrativo como propuesta didáctica para provechar los obstáculos de la comprensión en contexto matemático* presso la Universidad de Medellin, sotto la direzione di Bruno D'Amore e Martha Isabel Fandiño Pinilla, conseguendo il titolo di Maestría in Educación Matemática.

esame da parte di un certo studente, da un grado minimo (nessuna delle parole cancellate è stata riconosciuta e rimessa al suo posto) ad uno massimo (tutte le parole cancellate sono state riconosciute e rimesse al loro posto, esattamente quelle cancellate o suoi sinonimi).

4. Le variabili che sono state scelte per determinare le differenze aventi a che fare con i diversi tipi di testi di matematica sono state quelle descritte in (1), ma anche le seguenti: testi che accompagnano i brani scritti con figure o meno, testi che comprendono formule o meno (la formula può essere costituita anche da una sola lettera o da un segno di operazione, o da un loro complesso).

In questo scritto ci occupiamo della misura, il più possibile oggettiva, della eventuale mancata comprensione di un testo di matematica da parte di uno studente. Ma non ci occupiamo delle *cause* della mancata comprensione. Esse possono avere spiegazioni profonde che hanno la base in diverse teorie che qui non esploriamo. Si può trattare di scontri fra culture, mancanza di formazione specifica a carattere lessicale, banale ignoranza matematica, incapacità di coordinazione semantica, inadeguatezza delle informazioni a disposizione, incomprensione del compito proposto, presenza di ostacoli a carattere semiotico eccetera. Noi riteniamo che in questa direzione si possa e si debba indagare, ma ciò richiede alla base una sorta di misurazione della effettiva incomprensione di un testo scritto di matematica, non una generica impressione da parte dell’insegnante. È per questo che abbiamo deciso di affrontare come primo problema tale misurazione.

4. Decisioni prese sul brano da sottoporre alla formula di comprensione, obiettivo della ricerca, metodologia adottata

Dopo vari tentativi, abbiamo deciso di cancellare solo parole (anche se tecniche o specifiche) e non formule; le formule vengono lasciate inalterate e non vengono conteggiate fra le parole. Anche simboli isolati come lettere, numeri, segni di operazioni etc. sono considerati formule.

Esempio di III primaria.
Uno dei testi completi scelti è il seguente (Paciotti, Volpati, & Meloni, 1978, pp. 185–185):

> Con le dieci cifre che hai studiato gli anni scorsi, possiamo costruire tutti i numeri che vogliamo, all’infinito. Secondo il posto occupato dalle cifre, i numeri acquistano un valore diverso. Ogni raggruppamento di dieci oggetti forma una decina e si scrive 10. Se un numero è composto da due cifre, la cifra a destra rappresenta le unità (u), quella a sinistra le decine (da).
>
> 28 = 2 decine, 8 unità.
>
> Un gruppo di 100 oggetti, cioè cento unità (100 u), forma un centinaio e si scrive

> 100. Nel centinaio ci sono dieci gruppi di dieci oggetti, cioè dieci decine.
>
> Se un numero è composto da tre cifre, la cifra a destra rappresenta le unità, quella in mezzo le decine e quella a sinistra le centinaia (h).
>
> 289 = 2 centinaia, 8 decine, 9 unità.

Sulla base delle nostre scelte, cancelliamo le parole di posto 5, 10, 15 e così via, contando solo le parole, né i segni di punteggiatura né le lettere che formano formule, né i numeri; al posto delle parole cancellate appare uno spazio vuoto nel quale lo studente deve scrivere la parola mancante o suo sinonimo, per "chiudere" il testo dandogli un senso: ecco dunque il testo che è stato proposto agli studenti:

> Con le dieci cifre ⋯ hai studiato gli anni ⋯ , possiamo costruire tutti i ⋯ che vogliamo, all'infinito. ⋯ il posto occupato dalle ⋯ , i numeri acquistano un ⋯ diverso. Ogni raggruppamento di ⋯ oggetti forma una decina ⋯ si scrive 10. Se un ⋯ è composto da due ⋯ , la cifra a destra ⋯ le unità (u), quella a ⋯ le decine (da).
>
> 28 = 2 decine, 8 unità.
>
> ⋯ gruppo di 100 oggetti, cioè ⋯ unità (100 u), forma un centinaio ⋯ si scrive 100. Nel centinaio ⋯ sono dieci gruppi di ⋯ oggetti, cioè dieci decine.
>
> ⋯ un numero è composto ⋯ tre cifre, la cifra ⋯ destra rappresenta le unità, ⋯ in mezzo le decine ⋯ quella a sinistra le ⋯ (h).
>
> 289 = 2 centinaia, 8 decine, 9 unità.

Le parole cancellate sono dunque:

> che, scorsi, numeri, Secondo, cifre, valore, dieci, e, numero, cifre, rappresenta, sinistra, Un, cento, e, ci, dieci, Se, da, a, quella, e, centinaia.

Esempio di V secondaria.
Uno dei testi completi scelti è il seguente (Bagni, 1996, pag. 1314):

> Consideriamo la funzione reale f di variabile reale x espressa da $y = f(x)$ ed il punto di ascissa $x = c$ appartenente al dominio di essa. La valutazione diretta della f in corrispondenza dell'ascissa $x = c$ descrive, tradizionalmente, il comportamento della funzione data nel punto di ascissa $x = c$.
> Il tradizionale metodo per valutare la funzione nel punto $x = c$ si condensa quindi nella frase:
>
> «*nella formula $y = f(x)$, sostituendo alla variabile x il valore $x = c$, otteniamo per la y il valore $y = f(c)$*»
>
> e ciò equivale ad affermare che:
>
> «*nel punto di ascissa $x = c$, la funzione f assume il valore $f(c)$*».
>
> È però importante sottolineare che con un procedimento del genere otteniamo un'informazione riguardante esclusivamente il comportamento della funzione f

> nel singolo punto di ascissa $x = c$: e non sempre questa informazione è in grado di esaurire la conoscenza della funzione in una più ampia «zona» individuata dall'ascissa $x = c$.

Ed ecco il testo con le parole cancellate:

> Consideriamo la funzione reale f ··· variabile reale x espressa da $y = f(x)$ ··· il punto di ascissa $x = c$ ··· al dominio di essa. ··· valutazione diretta della f in ··· dell'ascissa $x = c$ descrive, tradizionalmente, ··· comportamento della funzione data ··· punto di ascissa $x = c$.
>
> Il ··· metodo per valutare la ··· nel punto $x = c$ si condensa ··· nella frase:
>
> «*nella formula $y = f(x)$, ··· alla variabile x il valore $x = c$, ··· per la y il valore $f(c)$*»
>
> ··· ciò equivale ad affermare ··· :
>
> «*nel punto di ascissa $x = c$, ··· funzione f assume il valore $f(c)$*».
>
> ··· però importante sottolineare che ··· un procedimento del genere ··· un'informazione riguardante esclusivamente ··· comportamento della funzione f nel ··· punto di ascissa $x = c$: e ··· sempre questa informazione è ··· grado di esaurire la ··· della funzione in una ··· ampia «zona» individuata dall' ··· $x = c$.

Le parole cancellate sono dunque:

> di, ed, appartenente, La, corrispondenza, il, nel, tradizionale, funzione, quindi, sostituendo, otteniamo, e, che, la, È, con, otteniamo, il, singolo, non, in, conoscenza, più, ascissa.

È ovvio che la tipologia delle parole cancellate è assai variabile; nel primo esempio appaiono termini tecnici della matematica (numeri, cifre, dieci, numero, centinaia), parole di lingua a carattere logico o intrinsecamente descrittivo (che, secondo, e, sinistra), parole della lingua naturale (scorsi, valore, un, da, a, quella); così succede anche nel secondo esempio.

L'esperienza derivata dallo studio della bibliografia e dalle prove euristiche più volte ripetute provano che la tipologia delle parole cancellate incide sulla comprensione del testo; che sono più identificabili parole della lingua naturale, che non parole di carattere logico, che non termini tecnici della matematica; e che dunque, nel valutare la difficoltà di uno studente nel ricreare il brano tratto da un testo a lui adatto, l'incidenza dell'errore debba essere "pesata"; cioè un conto è non identificare la parola "cifra", altra è non identificare la parola "e", altra ancora è non identificare la parola "da".

L'obiettivo di questa ricerca è dunque finalmente precisabile; è quello di: *creare una formula del tipo "test di chiusura", indipendente dal livello scolastico, che misuri la difficoltà nella quale si trova uno studente per comprendere un brano tratto da un testo di matematica adatto al livello scolastico nel quale egli si trova*.

La prova cui è sottoposto lo studente consiste nel consegnargli il testo risultante dopo le cancellazioni sopra specificate invitandolo a sostituire negli spazi lasciati vuoti dalle cancellazioni le parole che egli reputa mancanti per ridare senso al brano in oggetto.

La formula tiene conto di tutte le variabili in gioco, ivi comprese le tipologie delle parole cancellate (vedi sopra).

La ricerca ha seguito una metodologia di carattere empirico; si è partiti da una formula scelta fra quelle che la bibliografia ha consegnato alla storia; si sono fatte indagini preliminari per saggiare la bontà della formula, ritoccando i coefficienti, fino a giungere a quelli attuali. A seconda dei risultati trovati, sulla base del rapporto fra i valori degli indici stabiliti e il valore degli indici di comprensione, man mano si ritoccavano gli indici, fino a riconoscere come soddisfacenti quelli attuali (che vedremo tra breve).

Per esempio, solo dopo l'esame di vari brani in diversi livelli scolastici, si è deciso di non cancellare le formule (intese, come abbiamo detto in precedenza, in senso vasto) e di cancellare solo le parole; infatti la cancellazione di formule era allo stesso tempo:

a) del tutto casuale a seconda del brano scelto;
b) troppo significativa in molti brani e difficile da ricostruire da parte di un novizio.

D'altra parte, ci è sembrato interessante e sensato confrontare la difficoltà di porre in relazione il linguaggio naturale con quello formale per poter valutare la comprensione testuale, più che le competenze matematiche individuali (nel senso già espresso in precedenza, seguendo le ricerche già citate di Laborde, D'Amore e Maier).

Le prove sono state effettuate soprattutto in Italia, grazie alla collaborazione di vari insegnanti membri del RSDDM di Bologna, nelle scuole primaria, secondaria di I e II grado. In giorni prefissati, gli insegnanti consegnavano ai propri allievi e ad altri di classi parallele il brano sottoposto alle cancellazioni dette, spiegavano qual era il compito e davano tempi abbondanti per l'effettuazione della prova.

Il totale delle prove fatte è di 25 classi di scuola primaria, 4 di scuola secondaria di primo grado (2 in Italia e 2 in Colombia) e 10 di scuola secondaria di II grado, per un totale di 39 classi; hanno eseguito il test 463 allievi di scuola primaria, 66 di scuola secondaria di I grado e 127 di scuola secondaria di II grado per un totale di 656 allievi (ma parecchi di questi hanno fatto più prove).

5. La nostra proposta di una formula di comprensione di un testo di matematica da parte degli allievi

Sia dato un brano T che comprende n parole. Non si considerano formule né segni di punteggiatura. Il numero delle parole cancellate è Int(n/5) cioè la parte intera del numero razionale $n/5$. Delle parole cancellate fanno parte le seguenti categorie:

c_1) parole di lingua corrente non di carattere logico né tecnico (numero a);

c_2) parole tecniche della matematica (numero b);

c_3) parole di lingua a carattere logico (connettivi: non, e, o, implica, …; quantificatori: nessuno, alcuni, tutti, …; deduttivo: siccome, poiché, dimostra, …) (numero c).

Dunque: $a + b + c = \text{Int}(n/5)$. Notiamo che n, $\text{Int}(n/5)$, a, b, c sono tutti numeri naturali.

Sia:

$$m_T = a \times 0{,}1 + b \times 0{,}3 + c \times 0{,}4;$$

il numero razionale m_T si chiama "indice di difficoltà di T".

Siano:

a' le parole di tipo c_1 che il soggetto S riconosce in forma corretta ($a' \leq a$);

b' le parole di tipo c_2 che il soggetto S riconosce in forma corretta ($b' \leq b$);

c' le parole di tipo c_3 che il soggetto S riconosce in forma corretta ($c' \leq c$).

Si consideri ora la formula:

$$r_{TS} = (a - a') \times 0{,}1 + (b - b') \times 0{,}3 + (c - c') \times 0{,}4;$$

il numero razionale r_{TS} si chiama "indice di comprensione di T da parte di S".

Se $r_{TS} = 0$, si considera la comprensione del brano T da parte di S perfetta.

Se $0 \leq r_{TS} < m_T/2$ si considera la comprensione del brano accettabile o positiva;

se $m_T/2 \leq r_{TS} \leq m_T$ si considera la comprensione del brano insufficiente o negativa.

Se si pone in Excel la formula e si inseriscono i numeri di errori, il valore dei singoli r_{TS} viene dato automaticamente e questo semplifica enormemente i calcoli; la valutazione dei vari punteggi r_{TS} è immediata.

6. Una nota specifica sulle prove effettuate per assegnare i valori empirici precedenti

Sono state effettuate, grazie alla collaborazione dei componenti del gruppo di ricerca e di altri insegnanti disponibili isolati, molte prove empiriche con diversi valori, scegliendo diverse componenti variabili che hanno un ruolo decisamente importante in questa situazione:

1. studenti giudicati più affidabili o meno affidabili da parte degli insegnanti,
2. testi di matematica oggettivamente molto semplici o viceversa molto difficili,
3. cancellando anche formule o parte di esse,
4. dando in una classe un testo che era giudicato idoneo per una classe precedente,

…
Insomma, si sono poste e analizzate tante variabili per giungere ai valori 0,1 , 0,3 , 0,4 precedenti (che modificano a volte sensibilmente quelli che appaiono in formule empiriche classiche).

Abbiamo deciso di non riportare qui in modo specifico tutte le prove fatte e tutti i risultati parziali ottenuti; essi sono comunque a disposizione dei colleghi ricercatori, qualora lo ritenessero utile o interessante per il proseguimento di questi studi. Molte delle nostre prove sono state tabulate e dunque sono disponibili su fogli Excel.

Fra le prove empiriche che hanno fornito interessanti indizi su valori opportuni da usare, si è rivelato particolarmente utile quella che abbiamo chiamato "il testo facilitato" (vedi punto 4 precedente).

Supponiamo che uno studente Sq ottenga un punteggio r_{T1Sq} nella lettura di un brano T1 adatto al suo livello scolastico; e che ottenga un valore r_{T2Sq} nella lettura di un brano T2 idoneo a una classe di livello scolastico precedente a quello cui appartiene Sq; la formula ha un senso empirico accettabile se in generale risulta $r_{T1St} > r_{T2St}$.

Lo studio dei risultati di comprensione fatte su testi facilitati ci è stato di grande aiuto nella determinazione dei valori empirici scelti.

7. Risultati della ricerca

Poniamo in evidenza due aspetti da prendere in esame.

7.1. La formula esprime in modo oggettivo la comprensione di un dato testo in esame; dunque fornisce un criterio empirico della valutazione della comprensione di un testo in sé. Sulla base delle scelte fatte, tale valutazione è riferita a studenti che appartengono al grado scolastico per il quale il testo è stato pensato, scritto, pubblicato e scelto.

7.2. Una volta effettuata una prova in aula su un dato brano T su n studenti S_1-Sn, si può fare un'indagine statistica sugli n valori r_{TS} ottenuti e vedere, per esempio, dove si posiziona lo studente Sp ($1 \le p \le n$). Questo posizionamento indica la difficoltà nella quale oggettivamente Sp si trova, rispetto ai suoi compagni di classe.

Questo tipo di analisi non è presente nei lavori precedenti citati in bibliografia, ma ci è stato esplicitamente richiesto dai colleghi che hanno partecipato alla ricerca.

Più di un collega, infatti, è rimasto colpito, facendo e rifacendo prove nella classe di cui è titolare d'insegnamento, della obiettiva difficoltà che hanno mostrato alcuni studenti nel proporre parole da mettere al posto degli spazi vuoti per dare un senso al testo considerato di facile interpretazione da parte dell'insegnante. Hanno segnalato, per così dire, la necessità di favorire la comprensione testuale da parte degli studenti impegnati nel leggere brani di matematica. Riportiamo le parole che una collega-ricercatrice ci ha fatto giungere per iscritto:

> (…) d’altra parte, quando mai noi lasciamo da soli gli alunni a leggere un testo? Mai, siamo sempre lì a spiegare, a interpretare, al posto loro. Perfino quando diamo il testo di un problema, lo spieghiamo parola per parola. L’alunno non deve mai interpretare un testo, deve solo ascoltare la nostra interpretazione. (…)

E conclude:

> Nel fare questa ricerca ho capito che devo rischiare, far leggere da soli gli studenti, anche se poi sbagliano, devono imparare a capire da soli il significato (…).

(Con quel “rischiare”, l’insegnante sembra riecheggiare parole famosissime di Guy Brousseau…).

Questo tipo di riflessioni rinforza quanto già emerso in alcune ricerche precedenti circa la capacità di lettura e comprensione di un testo di matematica da parte degli studenti di qualsiasi età (D’Amore, 1996). E trasforma una ricerca empirica in una sollecitazione didattica non voluta all’inizio, che però pare assai opportuna.

Ci sono poi due variabili che sono state studiate ma non approfondite e che vogliamo almeno evidenziare perché ci sembrano peculiari.

7.3. Variabile uno: la presenza di una figura illustrativa all’interno del testo T che si sta usando come lettura nella prova.

In alcuni testi appariva, come parte del testo o come accompagnante il testo scritto, una figura, esclusivamente quando il contenuto del brano era di carattere geometrico. Come sempre accade in questi casi, il disegno illustra, nel registro semiotico figurale (o, più in generale, in un registro non discorsivo), quel che il testo dice nella lingua comune (nella sua versione a carattere matematico). Ora, è ben noto che molti insegnanti sono certi che il doppio registro aiuta la comprensione testuale dello studente, anche se in più occasioni, per esempio nei lavori citati qui di seguito, è stato mostrato che non è necessariamente così. La cosiddetta “visualizzazione” a volte complica la comprensione, come è stato mostrato in articoli di ricerca (D’Amore, 1995; Bagni, 1997, 1998; si vedano anche gli articoli contenuti in D’Amore, 1999b).

Per dirla in altre parole, qualche insegnante, soprattutto di scuola primaria e secondaria di I grado, pensava prima della prova che la presenza della figura illustrativa in un testo T avrebbe nettamente migliorato il valore di r_{TS}; si è invece visto come questo fatto semplicemente non sia successo.

Riteniamo che su questo punto si debba ancora fare ricerca, anche basandosi su temi specifici concernenti la semiotica che in questa sede tralasciamo (D’Amore, Fandiño Pinilla, & Iori, 2013).

7.4. Variabile due: la presenza o meno del titolo del brano T sottoposto a prova.

Alcuni testi che sono stati consegnati agli allievi iniziavano con il titolo; si trattava a volte di testi nei quali si davano le prime spiegazioni su un concetto matematico, quello richiamato nel titolo, appunto. Per esempio, in uno dei testi dati appariva il titolo: Media aritmetica. Il testo recitava come segue:

> Media aritmetica
> In statistica, si chiama media aritmetica il numero che si ottiene …

Cancellando le parole di posto multiplo di 5, ma lasciando intatto il titolo, si ottiene:

> Media aritmetica
> In statistica, si chiama ⋯ aritmetica il numero che ⋯ ottiene …

Si potrebbe ingenuamente ritenere che la prima parola cancellata (media) sia facilmente arguibile dal titolo; e invece gli studenti che scelgono di scrivere "media" al posto del primo spazio vuoto è minimo. Molti lasciano in bianco, altri scrivono: somma, espressione, calcolo (al maschile) e altri.

Il che ci riporta a considerare daccapo il senso che viene dato alla lettura del brano da parte dello studente che la esegue; forse la struttura editoriale dell'oggetto Testo T, che è ovvia per il docente, non lo è affatto per tutti gli studenti; il titolo illustra il contenuto per l'adulto, non comporta alcuna informazione per alcuni studenti (soprattutto per i più giovani).

8. Leggere e scrivere di matematica: l'apprendimento comunicativo in matematica

La classica dicotomia lettura/scrittura ci spinge a ricordare che, nella prassi scolastica matematica più o meno diffusa in tutto il mondo, si legge matematica (poco e male, a volte senza comprendere) ma che quasi mai si scrive matematica, a meno che non si tratti di testi di problemi o definizioni o regole sotto dettatura; è stato più volte rilevato invece che il modo migliore per appropriarsi dei concetti è quello di scriverne in maniera esplicita, e la matematica non fa eccezione (D'Amore & Maier, 2002). Una delle tecniche che hanno avuto più successo didattico è quella dei

> (…) TEP [letteralmente: produzioni testuali autonome degli allievi] cioè testi elaborati in modo autonomo dagli studenti ed aventi come soggetto questioni matematiche. Essi non devono coincidere con altre produzioni scritte in modo non autonomo (compiti in classe, appunti, descrizioni di procedimenti etc.). Le produzioni di questi ultimi esempi non sono autonome, sono sottoposte a vincoli più o meno esplicitamente stabiliti, sono di solito soggetti a valutazione dirette o indirette. (…) Diciamo che si considerano TEP quelle produzioni nelle quali lo studente, messo nella condizione di *volersi* esprimere in modo comprensibile e con linguaggio personale, accetta di liberarsi da condizionamenti linguistici e fa uso di espressioni spontanee.
> Esempi di TEP sono dunque:

- protocolli commentati di problem solving (come quelli descritti sopra)
- resoconto il più possibile spontaneo di ricerche di tipo matematico (tentativi, passaggi, misurazioni, risultati,…)
- descrizioni dettagliate e spiegazioni di concetti o di algoritmi matematici
- testi introdotti da una specifica situazione che richiede di comunicare fatti e relazioni matematiche in forma scritta
- testi che definiscono concetti matematici, che formulano ipotesi, argomentazioni o prove in relazione ad un teorema matematico o comunque ad una situazione matematica
- (…). (D’Amore & Maier, 2002, pp. 145 – 146)

Fra le funzioni didattiche dei TEP sono state riscontrate le seguenti, che interessano la nostra ricerca:

> La produzione di TEP stimola lo studente ad analizzare ed a riflettere su concetti matematici, relazioni, operazioni e procedure, ricerche e processi di problem solving con cui ha a che fare. Così ciascun allievo può raggiungere una maggiore consapevolezza ed una più profonda comprensione matematica di essi. I TEP possono migliorare le competenze e le prestazioni dello studente nell’uso del linguaggio specifico, poiché gli lasciano il tempo per un’attenta e riflessiva scelta dei significati linguistici, non come accade invece, a volte, durante una discussione o durante un’interrogazione, dall’evoluzione dialogica troppo rapida e caratterizzata dalla relazione troppo pre-stabilita; il TEP incoraggia ad un uso attivo dei termini tecnici e dei simboli (Maier, 1989a, 1989b, 1993; Maier & Schweiger, 1999). I TEP danno allo studente l’opportunità di tenere continuamente sotto controllo la propria comprensione di questioni matematiche, grazie ad un ragionato e riflessivo riscontro con l’insegnante ed i compagni di classe. I TEP consentono all’insegnante di valutare in modo effettivo la conoscenza personalmente costruita e la comprensione di idee matematiche, in maniera più dettagliata e profonda di quanto sia possibile sulla base dei comuni testi scritti, normalmente eseguiti come protocolli di attività di problem solving non commentati. (D’Amore & Maier, 2002, pp. 146–147)

Sulla base di quanto evidenziato in 7. e nella prima parte di 8., ci preme evidenziare che questo tipo di studio rientra, a nostro avviso, in quello che altrove abbiamo chiamato “apprendimento comunicativo in matematica” (Fandiño Pinilla, 2008).

Non è un caso che abbiamo deciso di fare un esplicito e deciso richiamo alla problematica dello “scrivere di matematica” e ai TEP. Consegnare allo studente una prova di chiusura relativa a un testo di matematica significa pretendere una comunicazione non del tutto completa ed esplicita fra lui e l’autore del brano; comunicazione che l’allievo deve reintegrare / reinventare / ricostruire / ricreare, cioè tornare a rendere esplicita sulla base delle supposte intenzioni dell’autore che lui interpreta (oppure dell’insegnante che ha presentato il medesimo contenuto matematico, senza escludere le eventuali letture di testi di altri autori sul medesimo tema). L’allievo sta completando una comunicazione matematica esplicita parziale rendendola, dal suo punto di vista, totale o completa. In questa sua attività comunicativa, mette in gioco la sua comprensione, la sua interpretazione, la sua propria esperienza linguistica. Non è come scrivere un TEP, dove vengono assegnati un tema di cui trattare e un soggetto cui scrivere; è assai diverso: qui deve accettare la lingua di comunicazione di un altro da sé, di un autore, o insegnante, e il tema che questi sta mettendo in gioco. Ma pur sempre di comunicazione si tratta.

Se comunicare è *cum-munire* (cioè: legare o costruire con), si forma qui un processo di comunicazione di grande interesse fra un autore di un testo (scelto a monte, in genere un esperto), uno studente (novizio) che interviene a "chiudere" il testo stesso interpretandolo, un adulto (insegnante, pure esperto) che deve decidere se tale compito è stato ben eseguito. Si ha uno scambio di informazioni fra l'autore, l'insegnante e lo studente; lo studente fa leva sulla comprensione e sulla cultura personale per interpretare le informazioni lacunose; ma lo studente comunica solo implicitamente con l'autore perché sa che dovrà sottoporre il suo lavoro al vaglio dell'insegnante e dunque, di fatto, comunica principalmente con questi; l'insegnante, nell'esprimere il giudizio sulla scelta delle parole che chiudono il testo monco, comunica con lo studente, chiudendo il ciclo.

9. Conclusione

Le ricerche empiriche hanno di affascinante che non possono mai dirsi concluse; nel senso che, cambiando il campione, cambiano alcune variabili; ripetendo le prove, si possono trovare risultati che permettono di migliorare i risultati ottenuti; eccetera.

Per esempio, che cosa succede se il testo T dato in lettura è stato in precedenza discusso in aula? Che cosa succede se si è dato come compito a casa la lettura del testo, avvisando che sarebbe stato oggetto di una prova il giorno successivo? E se invece di prendere in esame un testo scritto da un autore adulto si fosse analizzato il testo di un compagno (D'Amore et al., 1995)?

Le prove di leggibilità, ferme nella ricerca al 1995, ritrovano, in questa nostra esperienza, una nuova vitalità, ma anche il peso della consapevolezza critica moderna: che tali formule non sono più considerabili come un assoluto, ma un relativo (basterebbe per esempio assegnare valori diversi ai fattori moltiplicativi). E dunque auspichiamo ampio spazio dedicabile a ricerche future in questo settore.

Le scelte che abbiamo fatto conducono a pensare che, sulle base delle nostre scelte, la nostra è ancora una formula di comprensione (non più solo di leggibilità) di tipo classico, nella direzione delle prime ricerche condotte tra gli anni '50 e '90; ma che si potrebbero aprire fronti del tutto nuovi. Ma siamo anche consapevoli che l'insegnante possa usare la nostra formula:

a) per valutare il più obiettivamente possibile la difficoltà di comprensione di un testo di matematica; per esempio facendo la prova sugli alunni della propria classe per verificare qual è la media di successo raggiunto;

b) una volta verificato che un certo testo è comprensibile alla maggior parte degli allievi della propria classe, trovare il modo di incrementare la comprensione da parte di quegli allievi che hanno ottenuto un indice di comprensione inferiore alla media.

In questo modo, infatti, siamo di fronte a indici oggettivi e non solo a intuizioni. Quando la valutazione è il più possibile oggettiva, l’aiuto che si può dare a chi è in difficoltà è più facile, si tratta solo di capire le cause che hanno portato all’insuccesso.

C’è infine da dire che, pur non essendo nelle intenzioni degli autori, questa ricerca ha messo in evidenza una lacuna di carattere didattico, una perturbazione necessaria della prassi di insegnamento-apprendimento: occorre dare la possibilità agli studenti di leggere da soli brani di matematica, evitando di interpretarli sempre e costantemente noi insegnanti. Lo studente ha bisogno di questo tipo di attività, ha bisogno di sbagliare e di correggersi, di riflettere sui testi scritti, anche in vista delle prove che dovrà per forza affrontare da solo.

Per questo speriamo di aver contribuito a una riflessione professionale su uno specifico aspetto dell’apprendimento della matematica a non importa quale livello scolastico.

Ringraziamenti

Questa ricerca, durata oltre due anni, non avrebbe potuto aver luogo senza l’appassionato e critico contributo di tutti i ricercatori menzionati all’inizio, insegnanti italiani membri del RSDDM di Bologna più due insegnanti colombiani durante un corso di maestría in Educación Matemática presso l’Universidad de Medellin. Tutti hanno contribuito in forma assai più significativa di quanto era stato loro richiesto; nel senso che non si sono limitati a far fare le prove in aula ai propri studenti, ma hanno commentato i risultati ottenuti, rifatto in taluni casi le prove con altri criteri o sotto altre regole, usando variabili che man mano venivano empiricamente proposte e sottoposte a prova. A tutti un sincero ringraziamento. Uno speciale va a chi ha coordinato il lavoro degli insegnanti-ricercatori: Erminia Dal Corso, Annarita Monaco e Maura Iori.

Nota. *Questa è la versione riassunta e rielaborata in italiano di un articolo già pubblicato in inglese: D’Amore e Fandiño Pinilla (2015).*

Riferimenti bibliografici

Bagni, G. T. (1996). *Corso di matematica 3*. Bologna: Zanichelli.

Bagni, G. T. (1997). La visualizzazione nella scuola secondaria superiore.

L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, *20B*(4), 309–335.

Bagni, G. T. (1998). Visualization and didactics of mathematics in high school: An experimental research. *Scientia Paedagogica Experimentalis*, *35*(1), 161–180.

D'Amore, B. (1981). *Il libro di matematica 3*. Bologna: Cappelli.

D'Amore, B. (1987). Matematica e lingua: Reciproche influenze. *Riforma della scuola*, 12, 25–32. [Questo articolo è stato ripubblicato in: AA.VV., *Incontri con la Matematica 88/89* (pp. 43–60), Mathesis Peligna, Sulmona, 1990].

D'Amore, B. (1993a). *Problemi: Pedagogia e psicologia della matematica nell'attività di problem solving*. Milano, Angeli, II ed. it. 1996. [Ed. in lingua spagnola: Madrid, Sintesis, 1996].

D'Amore, B. (1993b). Esporre la matematica appresa: Un problema didattico e linguistico. *La matematica e la sua didattica*, *7*(3), 289–301. [Questo articolo è stato ristampato in: B. Jannamorelli (Ed.) (1994), *Insegnamento/Apprendimento della Matematica: linguaggio naturale e linguaggio della scienza*. Sulmona: Qualevita. Atti del I Sem. Internazionale di Didattica della Matematica, Sulmona marzo 1993. Questo articolo è poi stato pubblicato in lingua tedesca: *Schülersprache beim Lösen mathematischer Probleme*, in A. Gagatsis & H. Maier (Eds.) (1995), *Texte zur Didaktik der Mathematik* (pp. 105–125), Erasmus, Thessaloniki-Regensburg. Ancora in lingua tedesca, con lo stesso titolo, su: *Journal für Mathematik Didaktik*, *17*(2), 81–97 (a causa di un errore redazionale, questa versione dell'articolo uscì, per errore, a doppio nome (disponibile la lettera di scuse dell'allora Direttore)].

D'Amore, B. (1995). Uso spontaneo del disegno nella risoluzione di problemi di matematica. *La matematica e la sua didattica*, *9*(3), 328–370. [Questo testo è stato pubblicato anche in: B. Jannamorelli (Ed.), *Lingue e linguaggi nella pratica didattica,* Atti del II Seminario Internazionale di Didattica della Matematica (pp. 79–130), Sulmona, 30-31 marzo e 1 aprile 1995, Sulmona: Qualevita].

D'Amore, B. (1996). Difficoltà nella lettura e nella interpretazione del testo di un problema. *Bollettino degli insegnanti di matematica*, 32, 57–64.

D'Amore, B. (1997). Lingua naturale, modelli intuitivi e stereotipi nelle ore di matematica. In B. Jannamorelli & A. Strizzi (Eds.), *La ricerca in didattica della matematica: da ipotesi teoriche ad esperienze didattiche*, Atti del 3° Seminario Internazionale di Didattica della Matematica (pp. 57–68), Sulmona, aprile 1997, Torre dei Nolfi (AQ): Qualevita. [Questo articolo è stato pubblicato anche su: *Riforma e didattica*, 1, 1997, 29–36].

D'Amore, B. (1999a). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora. [Ed in lingua spagnola: (2006). *Didáctica de la Matemática*, Bogotá: Editorial Magisterio. Ed. in lingua portoghese: (2007). *Elementos da Didática da Matemática*. São Paulo: Livraria da Física. Con prefazioni di Ubiratan D'Ambrosio, Luis Rico Romero, Colette Laborde e Guy Brousseau].

D'Amore, B. (Ed.) (1999b). *Continuità e scuola*. Progetto per un percorso formativo unitario dalla scuola dell'infanzia alla secondaria superiore. Vol. 3: *La Matematica*. Quaderni di Documentazione dell'Istituto Pedagogico di Bolzano, n. 6. Quattro volumi in cofanetto. Milano-Bolzano: Junior.

D'Amore, B. (2000). Lingua, matematica e didattica. *La matematica e la sua didattica*, *14*(1), 28–47.

D'Amore, B. (2014). *Il problema di matematica nella pratica didattica*. Prefazioni di

Gérard Vergnaud e di Silvia Sbaragli. Modena: Digital Index. [Versione cartacea e versione e-book].
D’Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2015). A formula for an objective measurement of students’ understanding difficulties of a mathematical text. Evaluative and educational use. *Scientia Paedagogica Experimentalis* (Gand, Belgio), *52*(1-2), 27–58. ISSN: 0582-2351
D’Amore, B., & Maier, H. (2002). Produzioni scritte degli studenti su argomenti di matematica (TEPs) e loro utilizzazione didattica. *La matematica e la sua didattica*, *16*(2), 144–189.
D’Amore, B., & Martini, B. (1998). Il “contesto naturale”. Influenza della lingua naturale nelle risposte a test di matematica. *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *21A*(3), 209–234. [Questo articolo è stato stampato anche in traduzione spagnola: Suma, 30, 1999, 77–87].
D’Amore, B., & Sandri, P. (1994), Everyday language and “external” models in an a-didactic situation. In N. Malara & L. Rico (Eds.). [Ristampato in: A. Gagatsis (Ed.) (1994), (in greco) 253–262, (in francese) 585–594].
D’Amore, B., & Sandri, P. (1996). “Fa’ finta di essere...”. Indagine sull’uso della lingua comune in contesto matematico nella scuola media. *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *19A*(3), 223–246. [Questo articolo è stato ristampato in lingua spagnola su: *Revista EMA*, *Investigación e innovación en educación matemática* (Bogotà, Colombia), *4*(3), 1999, 207–231].
D’Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Iori, M. (2013). *Primi elementi di semiotica. La sua presenza e la sua importanza nel processo di insegnamento-apprendinento della matematica*. Prefazioni di Raymond Duval e di Luis Radford. Bologna: Pitagora. [Ed. in lingua spagnola: (2013). *La semiotica en la didáctica de la matemática*. Prefacios de Raymond Duval, Luis Radford. Prólogo a la edicción en idioma español de Carlos Eduardo Vasco. Bogotá: Magisterio].
D’Amore, B., Franchini, D., Gabellini, G., Mancini, M., Masi, F., Matteucci, A., Pascucci, N., & Sandri P. (1995). La ri-formulazione dei testi dei problemi scolastici standard. *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *18A*(2), 131–146. [Questo articolo è stato ristampato in lingua inglese su: A. Gagatsis & L. Rogers (Eds.) (1996). *Didactics and History of Mathematics* (pp. 53–72), Erasmus ICP 954 G 2011/11, Thessaloniki].
Fandiño Pinilla, M. I. (2008). *Molteplici aspetti dell’apprendimento della matematica. Valutare e intervenire in modo mirato e specifico*. Prefazione di Giorgio Bolondi. Trento: Erickson. [Versione in lingua spagnola: (2010). *Múltiples aspectos del aprendizaje de la matemática*. Prólogo de Giorgio Bolondi. Bogotá: Magisterio].
Flesh, R. (1951). *How to test readability*. New York: Harper and Row.
Gagatsis, A. (1980). *La transmission de l’information et son application a deux manuels scolaires*. Strasbourg IREM: Université Louis Pasteur.
Gagatsis, A. (1982). *Discrimination des scores au test de clôture et évaluation de la compréhension des textes mathématique*, Strasbourg, novembre 1982 (Thèse de 3e cycle).
Gagatsis, A. (1984). Préalables a une mesure de la compréhension. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *5*(1), 43–80.
Gagatsis, A. (1985). Questionnes soulevées par le test de clôture. *Revue Française de*

Pédagogie, 70, 41–50.

Gagatsis, A. (1995). Modi di valutazione della leggibilità dei testi matematici. *La matematica e la sua didattica*, *9*(2), 136–146.

Gagatsis, A., & Chaney, E. (1983). Le test de clôture en classe. *L'ouvert*, 32, 21–33.

Henry, G. (1973). *Construction de trois formules de lisibilité spécifiques à la langue francaise*. Thèse de doctorat, Università di Liège.

Kandel, L., & Moles, A. (1958). Application de l'indice de Flesh à la langue française. *Cahiers d'étude de la Radio-Télévision*, 19.

Kane, R., Byrne, M., & Hater, M. (1974). *Helping children read mathematics*. New York: American Book Company.

Laborde, C. (1982). *Langue naturelle et écriture symbolique: Deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique*. Thèse d'État, Univ. J. Fourier, Grenoble.

Laborde, C. (1990), Language and mathematics. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.) (1990), *Mathematics and cognition*. Cambridge: Cambridge University Press.

Laborde, C. (1995), Occorre apprendere a leggere e scrivere in matematica? *La matematica e la sua didattica*, *9*(2), 121–135.

Maier, H. (1989a). Problems of language and communication. In Pehkonen E. (Ed.) (1989), *Geometry – geometrieunterricht* (pp. 23–36). Helsinki: University.

Maier, H. (1989b). Conflit entre langage mathématique et langue quotidienne pour les élèves. *Cahiers de didactique des mathématiques*, 3, 86–118. [Trad. it.: *La matematica e la sua didattica*, *9*(3), 1995, 298–305].

Maier, H. (1993). Domande che si evolvono durante le lezioni di matematica. *La matematica e la sua didattica*, *7*(2), 175–191.

Maier, H. (1996). Apprendimento della matematica. Difficoltà e modalità per superale. In B. D'Amore B. (Ed.), *Convegno del decennale*. Atti dell'omonimo Convegno Nazionale (pp. 27–48), Castel San Pietro Terme, Bologna, Pitagora.

Maier, H., & Schweiger, F. (1999). *Mathematik und sprache. Zum verstehen und verwenden von fachsprache im mathematikunterricht*. Wien: Hölder-Piechler-Tempsky.

Paciotti, R., Volpati, M., & Meloni, L. (1978). *Evviva*, III classe (pp. 184–185), Novara: De Agostini.

Rankin, E. F. (1970). The cloze procedure, its validity and utility. In R. Farr (1970), *Measurement and evaluation of reading* (pp. 237–253). New York: Harcourt, Brace and World.

Taylor, W. L. (1953). Cloze procedure: A new tool for measuring readability. *Journalism Quarterly*, *30*(4), 415–433.

Vogel, M., & Washburne, C. (1928). An objective method of determining grade placement of children's reading material. *Elementary school journal*, *28*(5), 373–381.